235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Cadre : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, E un espace vectoriel normé.

I Limites et intégration

1) Suites de fonctions

Définition 1. Soit $f : X \to E$ bornée. On introduit la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E$. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Théorème 2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues d'un segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors on a :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \quad et \quad \int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

Exemple 3. $\left(x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right)_n$ *converge uniformément vers* $(x \mapsto e^{-x})$ *sur* $[0, 1]$*, donc :* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e}$

Corollaire 4. *Si $\sum g_n$ est une série de fonctions continues de $[A, b] \subseteq \mathbb{R}$ dans un Banach E qui converge normalement vers g sur $[a, b]$, alors :*

$$\int_a^b \sum_{n\geqslant 0} g_n(t)dt = \sum_{n\geqslant 0} \int_a^b g_n(t)dt$$

Théorème 5 (Beppo Levi)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.*

Application 6. *Soit $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to\infty} I_n(\alpha) = \int_0^\infty e^{(\alpha-1)x}dx = \frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$ et $+\infty$ sinon.*

Théorème 7 (Lemme de Fatou)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables et positives, alors $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.*

Application 8. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables simplement convergente vers f telle que $\sup_n \int_X |f_n| d\mu < \infty$. Alors f est intégrable.*

Application 9. *Soit f croissante sur $[0, 1]$, continue en 0 et 1, dérivable presque partout sur $[0, 1]$, alors $\int_0^1 f'(t)dt \leqslant f(1) - f(0)$.*

Théorème 10 (Convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^1(X, \mathbb{C}, \mu)$ et $f : X \to \mathbb{C}$ telles que :*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ μ p.p.

(ii) $\exists\, g \in L^1(X, \mathbb{R}^+, \mu), \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leqslant g(x)$ μ p.p.

Alors $f \in L^1(X, \mathbb{C}, \mu)$ et $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Application 11. *Soit f dérivable partout sur $[0, 1]$, de dérivée bornée. Alors $\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0)$.*

Théorème 12 (Fubini-Tonelli)**.** *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés, $\lambda = \mu \otimes \nu$, et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ λ-mesurable positive, alors :*

(i) $x \mapsto \int_Y f(x, y)d\nu(y)$ est μ-mesurable et positive.

(ii) $y \mapsto \int_X f(x, y)d\mu(x)$ est ν-mesurable et positive.

De plus, on a :

$$\int_{X\times Y} f d\lambda = \int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

Théorème 13 (Fubini)**.** *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés, $\lambda = \mu \otimes \nu$, et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ λ-intégrable, alors :*

(i) La fonction $x \mapsto \int_Y f(x, y)d\nu(y)$ est définie pour μ-presque tout $x \in X$ et est intégrable.

(ii) La fonction $y \mapsto \int_X f(x, y)d\mu(x)$ est définie pour ν-presque tout $y \in Y$ et est intégrable.

De plus, on a :

$$\int_{X\times Y} f d\lambda = \int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

Théorème 14. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.*

(i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant 0$, alors $\int_X \sum_{n\geqslant 0} f_n d\mu = \sum_{n\geqslant 0} \int_X f_n d\mu$.

(ii) Si $\sum_{n\geqslant 0} \int_X |f_n| d\mu < \infty$, alors f_n, $\sum_{n\geqslant 0} |f_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sont intégrables, et $\int_X \sum_{n\geqslant 0} f_n d\mu = \sum_{n\geqslant 0} \int_X f_n d\mu$.

Application 15 (Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_n)_n$ une suite de parties mesurables de X, alors :*

$$\sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

2) Intégrale à paramètre

Soit $f : E \times X \to \mathbb{K}$.

Théorème 16. *Soit $u_0 \in E$. On suppose que :*

(i) Pour tout $u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable.

(ii) Pour presque tout $x \in X$, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0.

(iii) $\exists\, g \in L^1(X, \mathbb{R}^+), \forall u \in E, |f(u,x)| \leqslant g(x)$ p.p.

Alors $u \mapsto \int_X f(u,x) d\mu(x)$ est définie pour tout $u \in E$ et continue en u_0.

Théorème 17. *On suppose que E est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et :*

(i) Pour tout $u \in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est μ-intégrable.

(ii) Pour presque tout $x \in X$, $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur E.

(iii) $\exists\, g \in L^1(\mu), \forall u \in E, \left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leqslant g(x)$ p.p.

Alors $F(u) = \int_X f(u,x) d\mu(x)$ est définie pour tout $u \in E$ et dérivable sur E, de dérivée $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x) d\mu(x)$.

Corollaire 18. *Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $]a,b[\subset \mathbb{R}$ un segment. Soit $f : A \times [a,b] \to E$, alors $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est continue. Si de plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $A \times [a,b]$, alors F est $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in A$, on a $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.*

Exemple 19. *Soit $\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \end{array} \right.$, alors Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$, et on a :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n e^{-t} t^{x-1} dt$$

II Limites et séries

On voit les séries comme des intégrales pour la mesure de comptage.

1) Séries de fonctions

Théorème 20. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors $\sum f_n$ est continue sur A.*

Exemple 21. *Sur $[0,1]$, on pose $f_n : x \mapsto x^n(1-x)$ continue. $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1[}$, qui est discontinue.*

Théorème 22. *Soient I un intervalle et $(f_n)_n$ une suite de fonctions dérivables sur I. On suppose que :*

(i) $\sum f_n$ converge simplement sur I

(ii) $\sum f_n'$ converge uniformément sur I

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur toute partie bornée de I, et $\sum f_n$ est dérivable sur I de dérivée $\sum f_n'$.

2) Séries entières

Définition 23. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ le réel R défini par :

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,\middle|\, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| r^n \leqslant M \right\}$$

$D(0,R)$ s'appelle le disque de convergence de $\sum a_n z^n$.

Proposition 24. *Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R.*

(i) Pour tout $z \in D(0,R)$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$, $\sum a_n z^n$ diverge.

(iii) Pour tout $r \in]0,R[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,r)}$.

Remarque 25. *On ne peut rien dire si $|z| = R$.*

Théorème 26. *L'application f, appelée somme de la série entière $\sum a_n z^n$, définie par :*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{n} a_n z^n \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, sa dérivée est donnée par :

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} D(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=1}^{n} n a_n z^{n-1} \end{array} \right.$$

Théorème 27 (Abel angulaire)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f sa somme et :*

$$\Delta_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 - z = \rho e^{i\varphi},\ \rho > 0,\ |\varphi| < \theta \right\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_\theta}} f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n$$

Application 28. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)n-1}{n} = \ln(2)$

Théorème 29 (Taubérien faible)**.** *Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\lim_{x\to 1^-} f(z) = \ell$ existe, et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $\sum a_n$ converge et $\ell = \sum_{n\geqslant 0} a_n$.*

III Applications

1) Holomorphie

Théorème 30. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$. Posons pour tout $z \in \Omega$ $F(z) = \int_X f(z,x)d\mu(x)$, et supposons que :*

(i) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x)$ *est mesurable*

(ii) $\forall x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ *est holomorphe*

(iii) Pour tout compact K de Ω, il existe $g \in L^1(X)$ telle que pour tous $z \in K$ et $x \in X$, $|f(z,x)| \leqslant g(x)$

Alors F est holomorphe sur Ω, et pour tous $z \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)d\mu(x)$$

Application 31. *Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On définit sur P la fonction holomorphe :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

2) Séries de Fourier

Définition 32. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Les coefficients exponentiels de Fourier de f sont :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

En posant $e_n : t \mapsto e^{int}$, la série de Fourier associée à f est la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_{-n}$.

Proposition 33 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si f est continue par morceaux et 2π-périodique, alors $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.*

Théorème 34. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. On a en particulier :*

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)^2$$

Proposition 35. *Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisation $\tilde{f}$ de f donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.*

Remarque 36. *L'hypothèse $\mathcal{C}^1$ par morceaux est nécessaire.*

Théorème 37. *Si f est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

Théorème 38. *Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, on considère l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T} \\ u(0,.) = u_0 & \text{dans } L^2(\mathbb{T}) \end{cases} \qquad (*)$$

Il existe une unique solution u de $(*)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T}$, avec $u(t,.)$ tendant vers u_0 dans $L^2(\mathbb{T})$ quand t tend vers 0.

Développements

- Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible (27,29) [Gou08]
- Équation de la chaleur sur le cercle (38) [Can09]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[BMP05] V. Beck, J. Malick, et G. Peyré. *Objectif Agrégation.* H&K
[BP12] M. Briane et G. Pagès. *Théorie de l'intégration.* Vuilbert
[El 11] M. El Amrani. *Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions.* Ellipses
[Can09] B. Candelpergher. *Calcul intégral.* Cassini